

Esonero 1 – AC310 (10/11/25) Nome e matr: _____

Es 1 [± 4 pt] (i) Descrivere geometricamente $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((1+i)z+3) > 0\}$.

(ii) Trovare le soluzioni di $\bar{z} = z^3$. (iii) Dire per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$.

Es 2 [6 pt] Sia $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Si definisca in modo analitico il ramo principale del logaritmo $\operatorname{Log} z$ su Ω_0 (in termini delle funzioni $|z|$ e $\operatorname{atan2}(x, y)$, identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) e, usando le equazioni di Cauchy–Riemann, si verifichi che $\operatorname{Log} z$ è olomorfa su Ω_0 e che, per ogni $z \in \Omega_0$, $e^{\operatorname{Log} z} = z$ e $\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$.

Es 3 [6 pt] Dimostrare che se $T = T(z_1, z_2, z_3)$ è un triangolo non degenere in $\mathbb{C}$ (ossia, l'involuppo convesso di tre punti non allineati), allora $\mathbb{C} = \mathring{T} \sqcup \partial T \sqcup T^c$ con $\mathring{T}$ e T^c aperti connessi di cui ∂T è la frontiera comune, e T^c è illimitato.

Es 4 [7 pt] Sia $a > 1$. Calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$ riconducendolo ad un integrale complesso sul cerchio unitario.

Es 5 [7 pt] Calcolare l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\log x \, dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.